Binary Search Trees

Giorgio Audrito

Online, 11 febbraio 2024

Introduzione

Gli insiemi: `std::set<T>`

Che cosa possono fare?

Gli insiemi: `std::set<T>`

Che cosa possono fare?

- aggiungere e rimuovere elementi

Gli insiemi: `std::set<T>`

Che cosa possono fare?

- aggiungere e rimuovere elementi
- controllare la presenza di un elemento qualunque

Gli insiemi: `std::set<T>`

Che cosa possono fare?

- aggiungere e rimuovere elementi
- controllare la presenza di un elemento qualunque
- trovare gli elementi nell'insieme più vicini ad un dato elemento

Gli insiemi: `std::set<T>`

Che cosa possono fare?

- aggiungere e rimuovere elementi
- controllare la presenza di un elemento qualunque
- trovare gli elementi nell'insieme più vicini ad un dato elemento
- sapere il numero totale di elementi

Gli insiemi: `std::set<T>`

Che cosa possono fare?

- aggiungere e rimuovere elementi
- controllare la presenza di un elemento qualunque
- trovare gli elementi nell'insieme più vicini ad un dato elemento
- sapere il numero totale di elementi
- accedere al minimo e massimo elemento

Gli insiemi: `std::set<T>`

Che cosa possono fare?

- aggiungere e rimuovere elementi
- controllare la presenza di un elemento qualunque
- trovare gli elementi nell'insieme più vicini ad un dato elemento
- sapere il numero totale di elementi
- accedere al minimo e massimo elemento

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento?

Gli insiemi: `std::set<T>`

Che cosa possono fare?

- aggiungere e rimuovere elementi
- controllare la presenza di un elemento qualunque
- trovare gli elementi nell'insieme più vicini ad un dato elemento
- sapere il numero totale di elementi
- accedere al minimo e massimo elemento

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)?

Gli insiemi: `std::set<T>`

Che cosa possono fare?

- aggiungere e rimuovere elementi
- controllare la presenza di un elemento qualunque
- trovare gli elementi nell'insieme più vicini ad un dato elemento
- sapere il numero totale di elementi
- accedere al minimo e massimo elemento

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)? $\mathcal{O}(ans)$
- somme (o altre operazioni associative) su elementi in un intervallo?

Gli insiemi: `std::set<T>`

Che cosa possono fare?

- aggiungere e rimuovere elementi
- controllare la presenza di un elemento qualunque
- trovare gli elementi nell'insieme più vicini ad un dato elemento
- sapere il numero totale di elementi
- accedere al minimo e massimo elemento

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)? $\mathcal{O}(ans)$
- somme (o altre operazioni associative) su elementi in un intervallo? $\mathcal{O}(ans)$
- fare unioni e intersezioni tra insiemi?

Gli insiemi: `std::set<T>`

Che cosa possono fare?

- aggiungere e rimuovere elementi
- controllare la presenza di un elemento qualunque
- trovare gli elementi nell'insieme più vicini ad un dato elemento
- sapere il numero totale di elementi
- accedere al minimo e massimo elemento

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)? $\mathcal{O}(ans)$
- somme (o altre operazioni associative) su elementi in un intervallo? $\mathcal{O}(ans)$
- fare unioni e intersezioni tra insiemi? $\mathcal{O}(N)$

Tutto troppo lento (se $k, ans \in \Omega(N)$).

Gli insiemi: `std::set<T>`

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)? $\mathcal{O}(ans)$
- somme (o altre operazioni associative) su elementi in un intervallo? $\mathcal{O}(ans)$
- fare unioni e intersezioni tra insiemi? $\mathcal{O}(N)$

Gli insiemi: `std::set<T>`

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)? $\mathcal{O}(ans)$
- somme (o altre operazioni associative) su elementi in un intervallo? $\mathcal{O}(ans)$
- fare unioni e intersezioni tra insiemi? $\mathcal{O}(N)$

Segment tree

Gli insiemi: `std::set<T>`

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)? $\mathcal{O}(ans)$
- somme (o altre operazioni associative) su elementi in un intervallo? $\mathcal{O}(ans)$
- fare unioni e intersezioni tra insiemi? $\mathcal{O}(N)$

Segment tree

- operazioni associative in $\mathcal{O}(\log V)$, memoria $\mathcal{O}(V)$

Gli insiemi: `std::set<T>`

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)? $\mathcal{O}(ans)$
- somme (o altre operazioni associative) su elementi in un intervallo? $\mathcal{O}(ans)$
- fare unioni e intersezioni tra insiemi? $\mathcal{O}(N)$

Segment tree

- operazioni associative in $\mathcal{O}(\log V)$, memoria $\mathcal{O}(V)$
- troppo se $V \gg N$

Gli insiemi: `std::set<T>`

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)? $\mathcal{O}(ans)$
- somme (o altre operazioni associative) su elementi in un intervallo? $\mathcal{O}(ans)$
- fare unioni e intersezioni tra insiemi? $\mathcal{O}(N)$

Segment tree

- operazioni associative in $\mathcal{O}(\log V)$, memoria $\mathcal{O}(V)$
- troppo se $V \gg N$
- comunque non ci aiutano per unioni/intersezioni

Gli insiemi: `std::set<T>`

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)? $\mathcal{O}(ans)$
- somme (o altre operazioni associative) su elementi in un intervallo? $\mathcal{O}(ans)$
- fare unioni e intersezioni tra insiemi? $\mathcal{O}(N)$

Gli insiemi: `std::set<T>`

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)? $\mathcal{O}(ans)$
- somme (o altre operazioni associative) su elementi in un intervallo? $\mathcal{O}(ans)$
- fare unioni e intersezioni tra insiemi? $\mathcal{O}(N)$

Segment tree sparso

Gli insiemi: `std::set<T>`

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)? $\mathcal{O}(ans)$
- somme (o altre operazioni associative) su elementi in un intervallo? $\mathcal{O}(ans)$
- fare unioni e intersezioni tra insiemi? $\mathcal{O}(N)$

Segment tree sparso

- operazioni associative in $\mathcal{O}(\log V)$, memoria $\mathcal{O}(N \log V)$

Gli insiemi: `std::set<T>`

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)? $\mathcal{O}(ans)$
- somme (o altre operazioni associative) su elementi in un intervallo? $\mathcal{O}(ans)$
- fare unioni e intersezioni tra insiemi? $\mathcal{O}(N)$

Segment tree sparso

- operazioni associative in $\mathcal{O}(\log V)$, memoria $\mathcal{O}(N \log V)$
- bene ma non benissimo: se $N \approx 10^6$ e $V \approx 10^{18}$, sono
  - $3\times$ più lento di $\mathcal{O}(\log N)$
  - $20\times$ più spazioso di $\mathcal{O}(N)$

Gli insiemi: `std::set<T>`

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)? $\mathcal{O}(ans)$
- somme (o altre operazioni associative) su elementi in un intervallo? $\mathcal{O}(ans)$
- fare unioni e intersezioni tra insiemi? $\mathcal{O}(N)$

Segment tree sparso

- operazioni associative in $\mathcal{O}(\log V)$, memoria $\mathcal{O}(N \log V)$
- bene ma non benissimo: se $N \approx 10^6$ e $V \approx 10^{18}$, sono
  - $3\times$ più lento di $\mathcal{O}(\log N)$
  - $20\times$ più spazioso di $\mathcal{O}(N)$
- comunque non ci aiutano per unioni/intersezioni

Gli insiemi: `std::set<T>`

E se invece volessimo...

- trovare il k-esimo elemento? $\mathcal{O}(k)$
- sapere quanti elementi sono in un certo intervallo (o somme, ecc...)? $\mathcal{O}(ans)$
- somme (o altre operazioni associative) su elementi in un intervallo? $\mathcal{O}(ans)$
- fare unioni e intersezioni tra insiemi? $\mathcal{O}(N)$

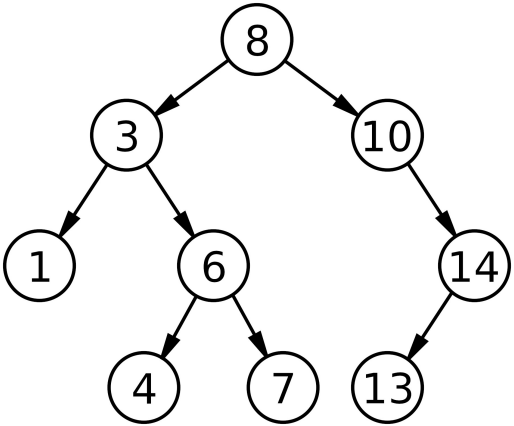
Segment tree sparso

- operazioni associative in $\mathcal{O}(\log V)$, memoria $\mathcal{O}(N \log V)$
- bene ma non benissimo: se $N \approx 10^6$ e $V \approx 10^{18}$, sono
  - $3\times$ più lento di $\mathcal{O}(\log N)$
  - $20\times$ più spazioso di $\mathcal{O}(N)$
- comunque non ci aiutano per unioni/intersezioni

ci tocca capire come sono fatti i `set` per poterli personalizzare...

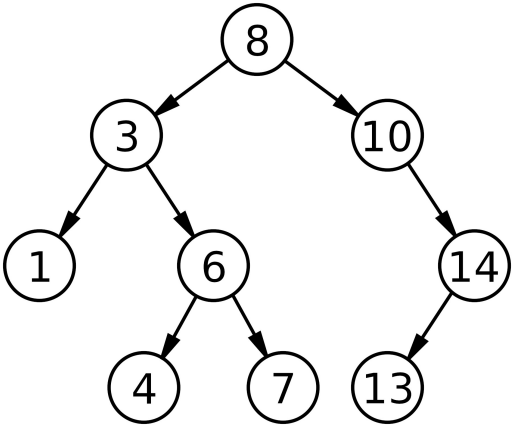
Binary Search Trees

- elementi in un albero binario
- a sinistra gli elementi più piccoli
- a destra gli elementi più grandi
- . . . so sempre come navigare
- . . . posso mantenere dati associativi



Binary Search Trees

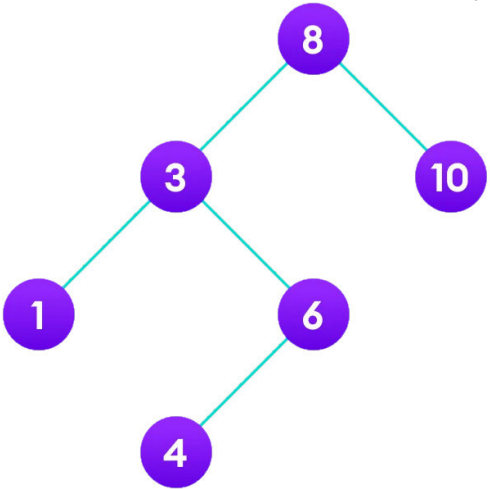
- elementi in un albero binario
- a sinistra gli elementi più piccoli
- a destra gli elementi più grandi
- . . . so sempre come navigare
- . . . posso mantenere dati associativi

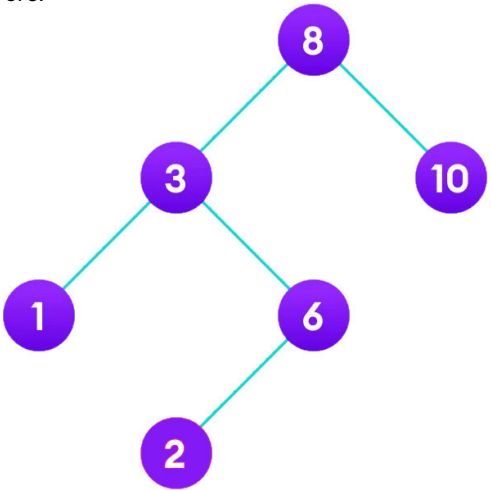


ci possono anche essere alberi non binari ma non ci interessano ora

Binary Search Trees

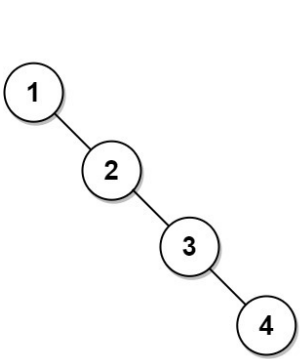
Trova l'errore:

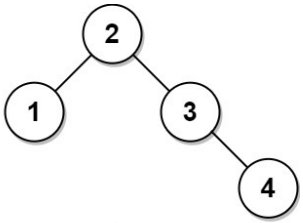


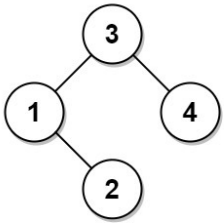


Binary Search Trees

Ci possono essere molti BST con gli stessi elementi:







Quale preferiremmo?

Balanced Binary Search Trees

- mantenere bilanciamento mentre si aggiungono elementi

Balanced Binary Search Trees

- mantenere bilanciamento mentre si aggiungono elementi
- richiede di modificare l'albero (tree rotations)

Balanced Binary Search Trees

- mantenere bilanciamento mentre si aggiungono elementi
- richiede di modificare l'albero (tree rotations)
- moltissimi modi per farlo, noi vediamo i **treap**

Balanced Binary Search Trees

- mantenere bilanciamento mentre si aggiungono elementi
- richiede di modificare l'albero (tree rotations)
- moltissimi modi per farlo, noi vediamo i **treap**

Treap = Tree + Heap

- struttura dati **randomizzata**, l'albero è bilanciato in media

Balanced Binary Search Trees

- mantenere bilanciamento mentre si aggiungono elementi
- richiede di modificare l'albero (tree rotations)
- moltissimi modi per farlo, noi vediamo i **treap**

Treap = Tree + Heap

- struttura dati **randomizzata**, l'albero è bilanciato in media
- genero priorità random per ogni elemento da inserire

Balanced Binary Search Trees

- mantenere bilanciamento mentre si aggiungono elementi
- richiede di modificare l'albero (tree rotations)
- moltissimi modi per farlo, noi vediamo i **treap**

Treap = Tree + Heap

- struttura dati **randomizzata**, l'albero è bilanciato in media
- genero priorità random per ogni elemento da inserire
- forzo un ordinamento a **heap**: padre maggiore (o minore) dei figli

Balanced Binary Search Trees

- mantenere bilanciamento mentre si aggiungono elementi
- richiede di modificare l'albero (tree rotations)
- moltissimi modi per farlo, noi vediamo i **treap**

Treap = Tree + Heap

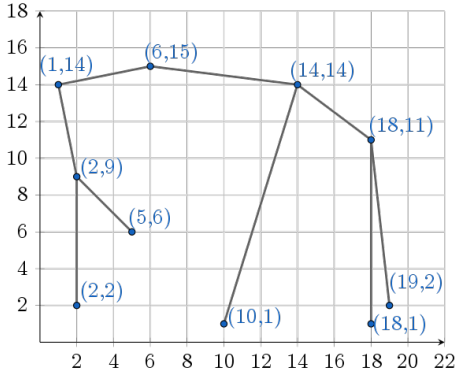
- struttura dati **randomizzata**, l'albero è bilanciato in media
- genero priorità random per ogni elemento da inserire
- forzo un ordinamento a **heap**: padre maggiore (o minore) dei figli
- servono anche per avere array con operazioni su range rapide (implicit treap)

Treaps

Treaps

Treap = Tree + Heap

- struttura dati **randomizzata**, l'albero è bilanciato in media
- genero priorità random per ogni elemento da inserire
- forzo un ordinamento a **heap**: padre maggiore (o minore) dei figli
- servono anche per avere array con operazioni su range rapide (implicit treap)



detto anche **cartesian tree** perché si disegna bene

Treaps

Ma esiste almeno un Treap dati elementi e priorità?

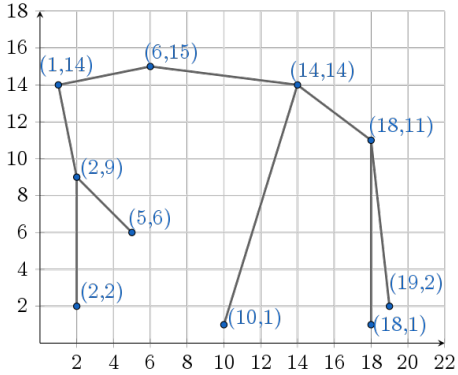
Sì: ordina gli elementi per priorità e poi inseriscili naturalmente nell'albero senza ribilanciare

Possono esistere Treap diversi per gli stessi dati?

No! Si può dimostrare ricorsivamente

Come mantenere la proprietà Heap?

Tramite **split** e **merge**...



Split!

`split`(T, k)

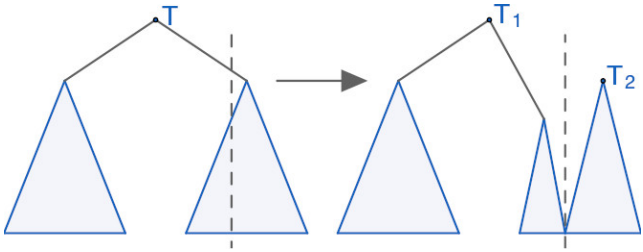
- restituisce due treap L e R
- L con gli elementi $\leq k$
- R con gli elementi $> k$

se $T.\text{root.val} \leq k$:

- $RL, RR = \texttt{split}(T.R, k)$
- $L = \texttt{treap}(T.\text{root}, T.L, T.RL)$
- `return` L, RR

se $T.\text{root.val} > k$:

- $LL, LR = \texttt{split}(T.L, k)$
- $R = \texttt{treap}(T.\text{root}, T.LR, T.R)$
- `return` LL, R



Merge!

merge(L, R)

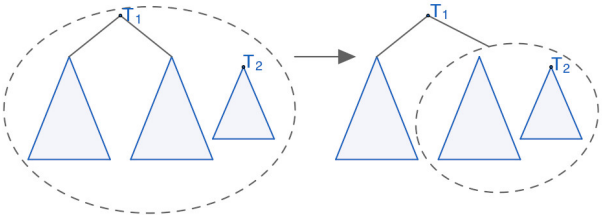
- assume che $L < R$
- unisce i due treap

se $L.\text{root.pri} \geq R.\text{root.pri}$:

- $R = \texttt{merge}(L.R, R)$
- $T = \texttt{treap}(L.\text{root}, L.L, R)$
- `return` T

se $L.\text{root.pri} < R.\text{root.pri}$:

- operazione simmetrica



Operazioni derivate

`insert`(T, x)

- imposta priorità random
- $L, R =$ `split`(T, x)
- `merge`(L, x, R)

`erase`(T, x, y)

- $L, \_ =$ `split`(T, x)
- $\_, R =$ `split`(T, y)
- `merge`(L, R)

`union`(T, S)

- assumiamo che $T.\text{root.pri} > S.\text{root.pri}$
- poniamo $L, R =$ `split`$(S, T.\text{root.val})$
- faccio `union`$(T.L, L)$ e `union`$(T.R, R)$

`intersect`(T, S)

- assumiamo che $T.\text{root.pri} > S.\text{root.pri}$
- poniamo $L, R =$ `split`$(S, T.\text{root.val})$
- faccio `intersect`$(T.L, L)$ e `intersect`$(T.R, R)$
- li unisco, eventualmente con $T.\text{root}$

Informazioni aggiuntive

Mantenere la dimensione dei sottoalberi

- aggiungo valore cont per ogni nodo
- basta aggiungerlo nel costruttore del treap dati i figli, viene gratis per tutte le operazioni
- consente di rispondere a k-esimo elemento, quanti elementi in un intervallo, e altro

Informazioni aggiuntive

Mantenere la dimensione dei sottoalberi

- aggiungo valore cont per ogni nodo
- basta aggiungerlo nel costruttore del treap dati i figli, viene gratis per tutte le operazioni
- consente di rispondere a k-esimo elemento, quanti elementi in un intervallo, e altro

Altre informazioni associative

- funzionano allo stesso modo
- consentono di usare un treap un po' come un segment (somme, ecc)

Treap Impliciti

usiamo i treap per una DS che fa:

- operazioni come un array
- inserimento in posizione arbitraria
- operazioni associative su intervalli arbitrari
- invertire intervalli arbitrari

Treap Impliciti

usiamo i treap per una DS che fa:

- operazioni come un array
- inserimento in posizione arbitraria
- operazioni associative su intervalli arbitrari
- invertire intervalli arbitrari

Idea principale

- l'indice di un elemento è pari al numero di elementi prima di lui
- https://cp-algorithms.com/data_structures/treap.html#implicit-treaps