dobbiamo contare i cerchi

1	1							
2	1	2						
3	1	2	3					
4	1	2	3	4				
5	1	2	3	4	5			
6	1	2	3	4	5	6		
7	1	2	3	4	5	6	7	
8	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor$	$2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$	$3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$	...				

cses chiede

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i)$$

i divisori di i

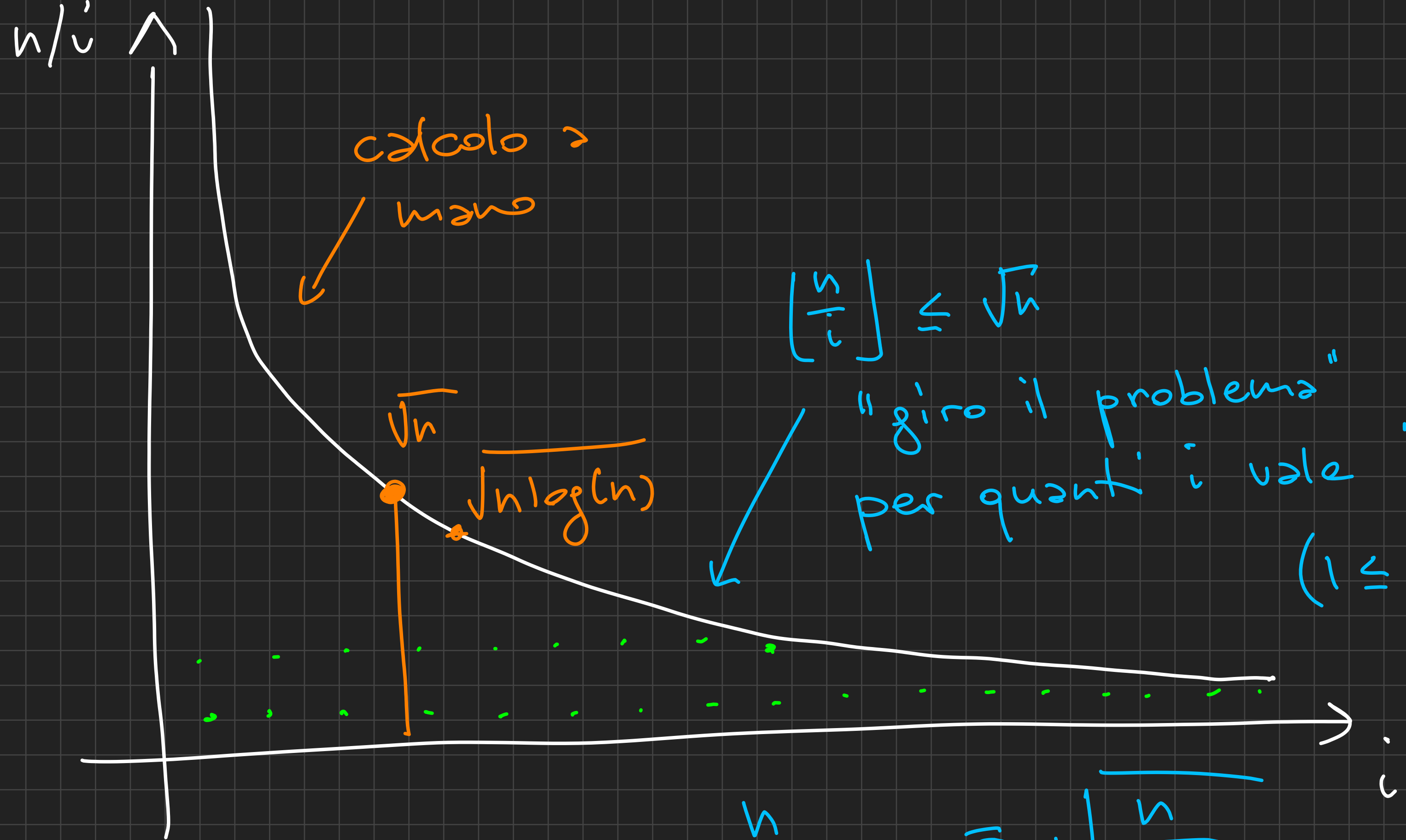
$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

$$\left\lfloor \frac{12}{1} \right\rfloor \quad \left\lfloor \frac{12}{2} \right\rfloor \quad \dots \quad \left\lfloor \frac{12}{6} \right\rfloor \quad \left\lfloor \frac{12}{7} \right\rfloor \quad \left\lfloor \frac{12}{8} \right\rfloor \quad \dots \quad \left\lfloor \frac{12}{12} \right\rfloor$$

$$12 \quad 6 \quad \underbrace{\dots}_{4} \; \underbrace{\dots}_{3} \; \underbrace{\dots \quad 2}_{2} \quad \underbrace{\overset{l}{1} \quad 1 \quad \dots \quad \overset{r}{1}}_{1}$$

$\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ costante in un intervallo

parziale : $\underbrace{(l + (l+1) + \dots + r)}_{O(1)} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$



$\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \le \sqrt{n}$

"giro il problema"

per quanti i vale $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = k$?

$(1 \le k \le \sqrt{n})$

$$\frac{n}{\sqrt{n\log(n)}} = \sqrt{\frac{n}{\log(n)}}$$

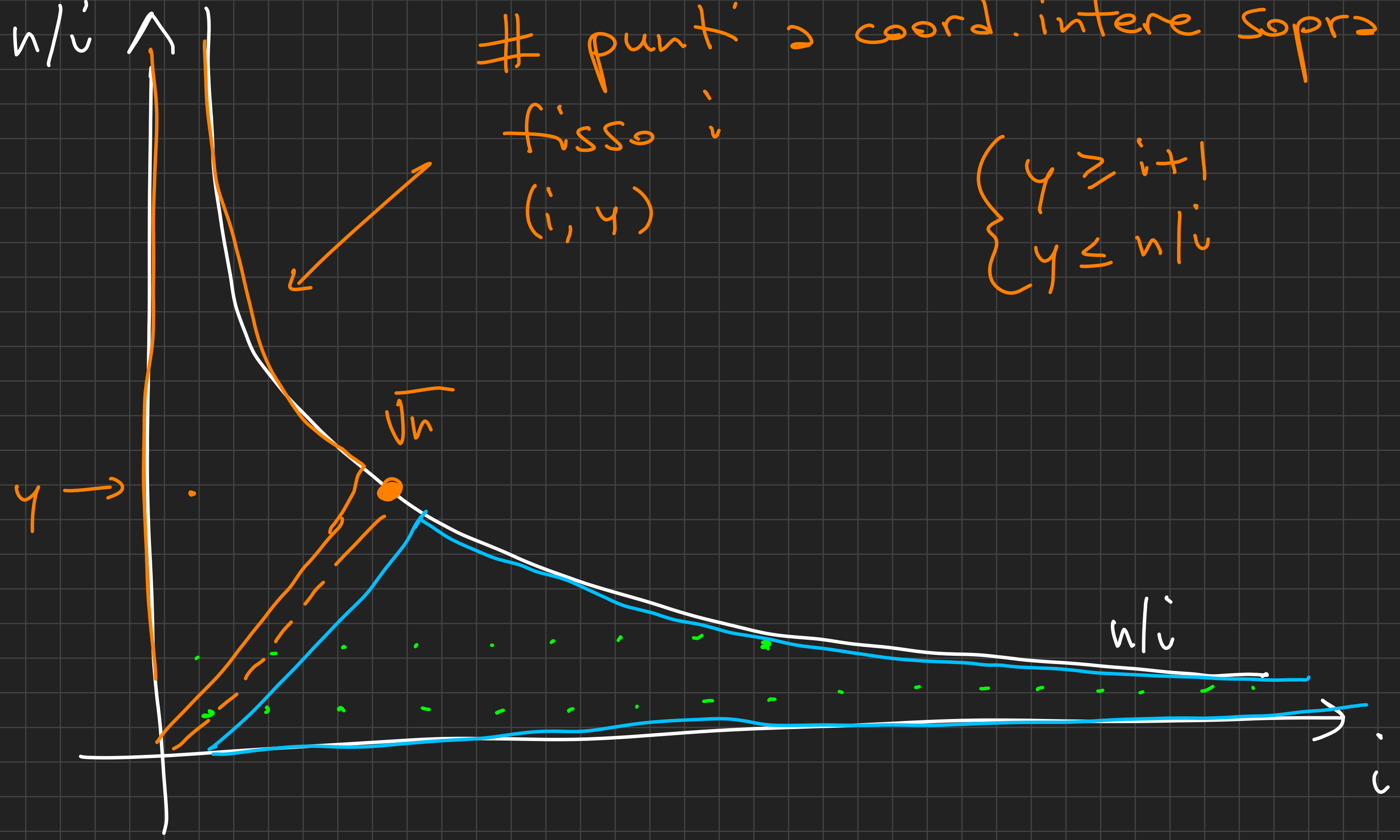
$$O\left(\log(n) \cdot \sqrt{\frac{n}{\log(n)}}\right) = O\left(\sqrt{n\log(n)}\right)$$

$\#$ punti a coord. intere sopra la diag.

fisso i

(i, y)

$$\begin{cases} y \geq i+1 \\ y \leq n/i \end{cases}$$



\# divisori — già visto

$\sum$ divisori

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$d = 2^\alpha \cdot 3^\beta \qquad 0 \le \alpha \le 3 \qquad 0 \le \beta \le 2$$

\# modi $= (3+1)(2+1)$

$$\frac{3^3-1}{3-1}$$

$$x^0 + x^1 + \cdots + x^k = \frac{x^k - 1}{x - 1}$$

	2^0	2^1	2^2	2^3
3^0	1	2	4	8
3^1	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72

$\longrightarrow \dfrac{2^4-1}{2-1} = S$

$3S$

$3^2 S$

$S(3^0 + 3^1 + 3^2)$

$$\sum \text{tabella} = (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2)$$

si generalizza a un # arbitrario di fattori primi

$\prod$ divisori

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 12$

12

12

12

12^3

$\frac{\#\text{ divisori}}{2}$

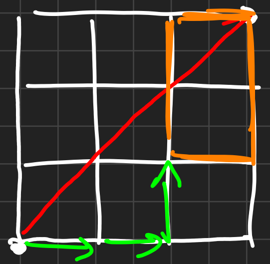
n

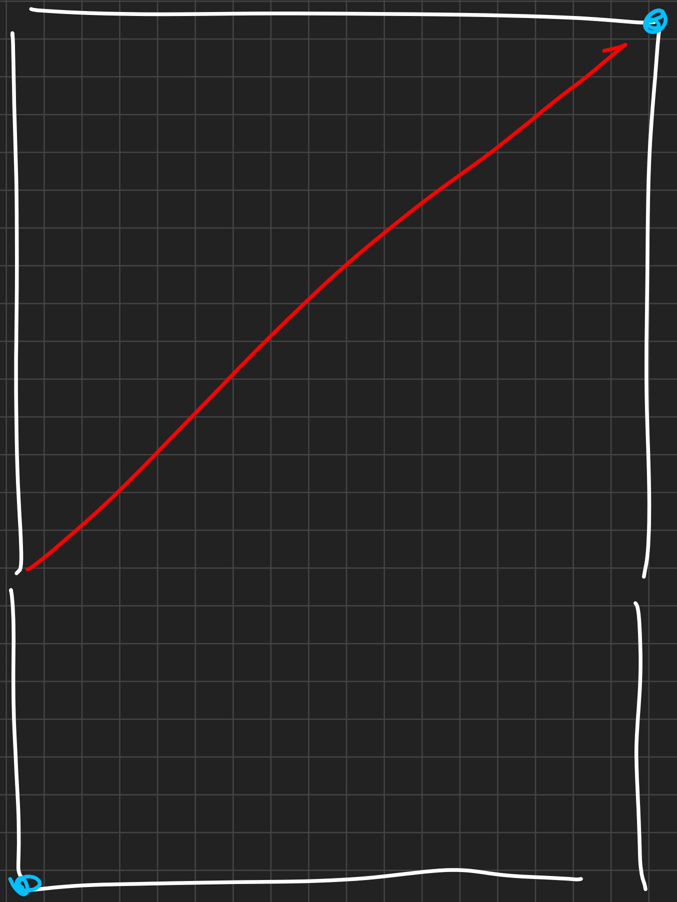
· # divisori dispari?

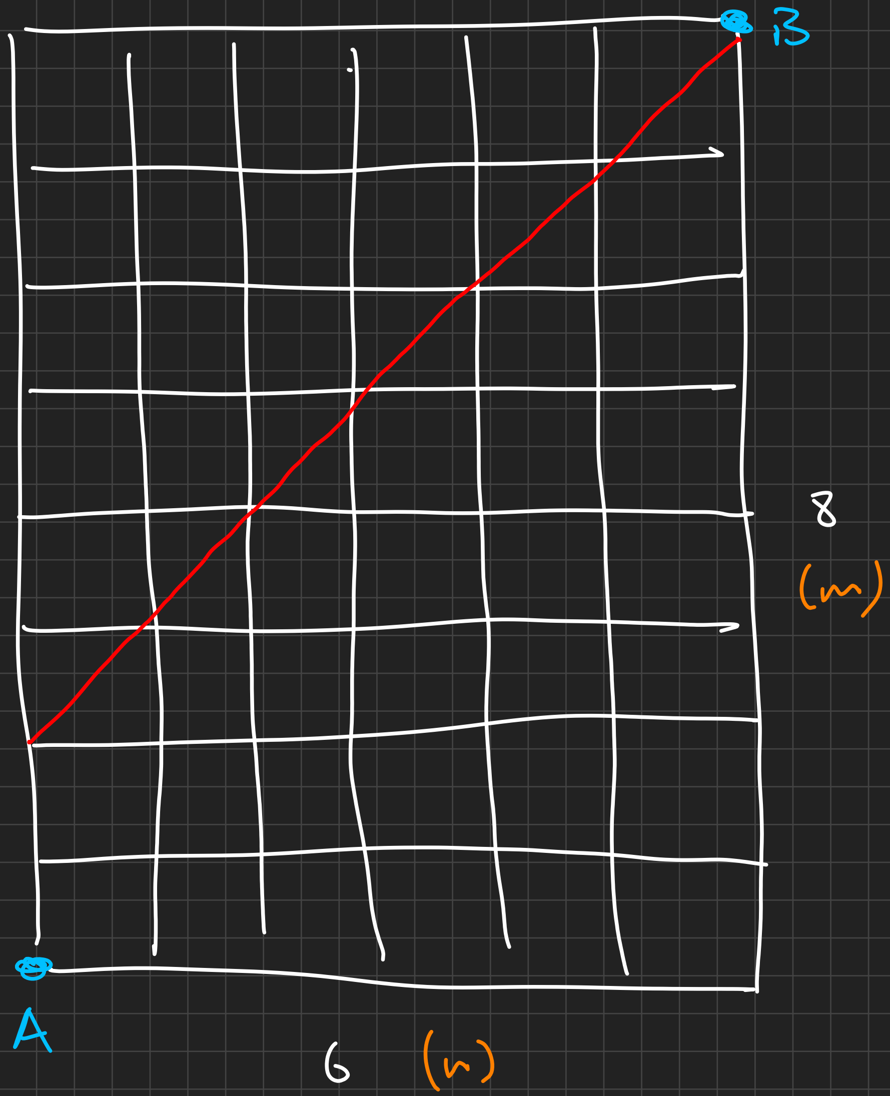
n è un quadrato $\Rightarrow$ $(\sqrt{n})^{\#\text{ divisori}}$ è intero

((( )))

R R R U U U







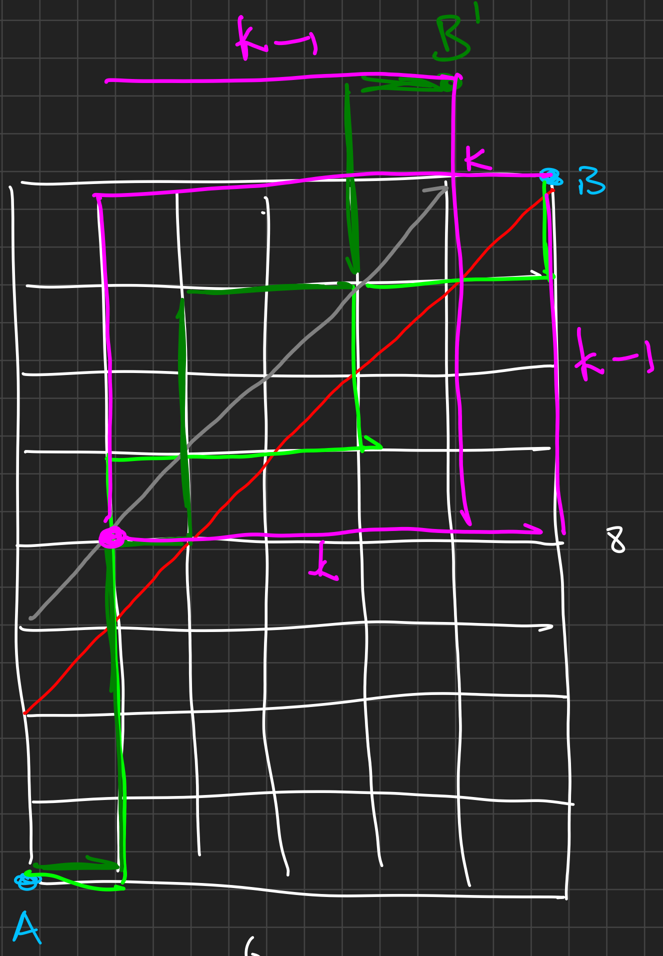
- conto i percorsi totali

$\binom{6+8}{8}$ $\binom{n+m}{m}$

- tolgo quelli che superano la diagonale

$\binom{5+9}{9}$ $\binom{n+m}{m+1}$

$$\binom{n+m}{m} - \binom{n+m}{m+1}$$


k-1
B'
k
B
k-1
8
k
A
6


B'
B''
?

- conta coppie con $\gcd = 1$
  - conto coppie totali, tolgo $\gcd = 2, \dots, m$?
    non va bene perché tolgo coppie più volte

inclusione-esclusione

- quante configurazioni soddisfano n proprietà?

voglio contare $p_1, \dots, p_n$ t.c. $p_1 \neq 1, p_2 \neq 2, \dots, p_n \neq n$

proprietà:
- $p_1 \neq 1$
- $\vdots$
- $p_n \neq n$

- Conto le config. totali (+1) (+1)
- tolgo quelle che sicuramente non soddisfano 1 proprietà (-3) (-4)
  (ad esempio, $p_1 = 1$)
- sto togliendo ($p_1 = 1$, $p_2 = 2$) 2 volte
  riaggiungo le conf. che sicuramente non soddisfano 2 proprietà (+3) (+6)
- $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$ (-4)
  quante volte lo sto contando? +1
  tolgo
- $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $p_4 = 4$ -1
  aggiungo

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots \pm \binom{n}{n-1} = \pm 1$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots \pm \binom{n}{n-1} \mp \binom{n}{n} = 0$$

$$0 = (1-1)^n = \sum \binom{n}{i} (-1)^i \cancel{1^{n-i}}$$

(n pari)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} = 2^{n-1}$$

1 2 3 4 5

$\updownarrow$

1 2 3 4 5

ogni coppia ha un sottoins. "pari" e uno "dispari" derangements

- config. totali $n!$

- config. con 1 punto fisso "sicuro"
  - scelgo il punto fisso n
  - permuto gli altri $(n-1)!$

$\vdots$

- config. con k punti fissi "sicuri"
  - scelgo i punti fissi $\binom{n}{k}$
  - permuto gli altri $(n-k)!$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \underbrace{\binom{n}{k}}_{O(n)?} (n-k)!$$

troppo lento

- precalcolo i fattoriali (O(n) in tutto)
- calcolo ogni termine in O(1)
- per calcolare i binomiali, servono gli inversi dei fattoriali

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \equiv n! \, (k!)^{-1} ((n-k)!)^{-1}$$

devo precalcolare anche gli inversi (qui non è necessario, ma ho un O(log(mod)))

$\gcd(a, p) = 1$

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

$(a^p \equiv a \pmod p)$

m qualsiasi

$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod p$

$$a^{-1} \equiv a^{-1} \cdot 1 \equiv a^{-1} \cdot a^{p-1} \equiv \underbrace{a^{p-2}}_{\text{inverso di } a} \pmod p$$

- problema più facile: conto le coppie con gcd multiplo di k
  - basta che a_i, a_j siano multipli di K
    conto i multipli di k

1 2 3 4 5 6

- proviamo incl. - escl.
  - gcd multiplo di 1 (+1) (1,2) (1,3) - - (1,6) (2,3) - - - (2,6) - - - (5,6)
  - gcd multiplo di 2 (2,4) (2,6) (4,6) (−1)
  - 3 (−1)
  - 4 (0)

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)

~~(2, 2)~~ (2, 3) ~~(2, 4)~~ (2, 5) ~~(2, 6)~~

~~(3, 3)~~ (3, 4) (3, 5) ~~(3, 6)~~

~~(4, 4)~~ (4, 5) ~~(4, 6)~~

~~(5, 5)~~ (5, 6)

~~(6, 6)~~

- 5 (−1)
- 6 (+1)

	1	2	3	4	5	6	. . .	n
mult. di 1 →	1	1	1	1	1	1		(−1)
2 →	1	0	1	0	1	0		
⋮	1	0	0	0	1	−1		
	1	0	0	0	1	−1		
	1	0	0	0	0	−1		
n →	1	0	0	0	0	0		

(−1) (−1) (−1)

· (−1)

funzione di Möbius

$\mu(n)$

$O(n\log(n))$

$mul[i]$ = # multipli di i nell'array

· per ogni i, contiamo i multipli di i

$f[i] + f[2i] + \dots + f[\lfloor \frac{m}{i} \rfloor i]$

$O(m \log(m))$

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{la fatt. di } n \text{ ha almeno un esponente} \geq 2 \\ 1 & n \text{ ha un \# pari di fattori primi} \\ -1 & \text{altr.} \end{cases}$$

$\boxed{1}$ 21 22 $\longrightarrow$ 1 $\longrightarrow$ 20 $\longrightarrow$ 19 $\longrightarrow$ ...

$x > y$

$(x, y) \longrightarrow (x-y, y) \longrightarrow \dots \longrightarrow \gcd(x, y)$

(algoritmo di Euclide)

- riesco a scrivere il gcd
- riesco a scrivere tutti i multipli del gcd $\leq$ del massimo dell'array

2 Cosa riesco a ottenere sommando 11, 111 ?
(a) (b) ⚠ $\gcd(a,b)=1$

"McNuggets Theorem"

si può dimostrare che si riescono a ottenere tutti i numeri

$> ab - a - b$ (≥ 1100)

- sketch: guardo per ogni i qual è il minimo intero $\equiv i$ $(\bmod 11)$ che riesco a ottenere

$0 \pmod{11}$ — 0

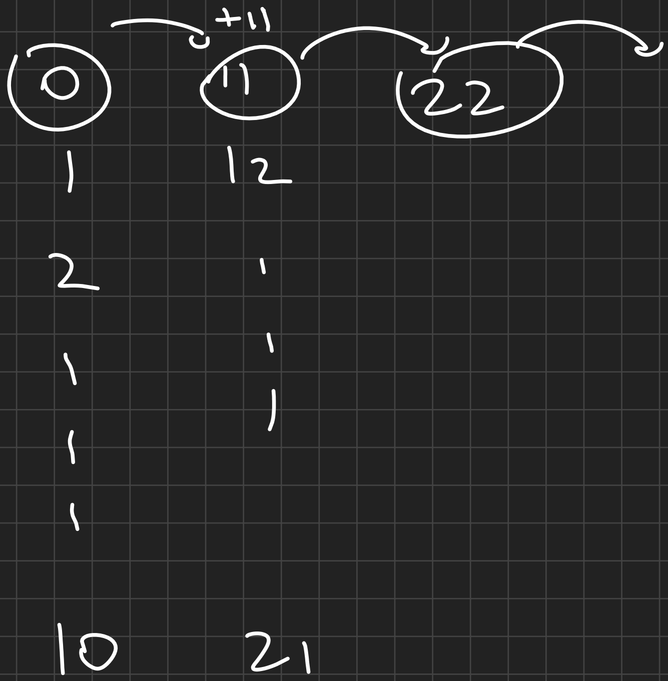
$1 \pmod{11}$ — 111

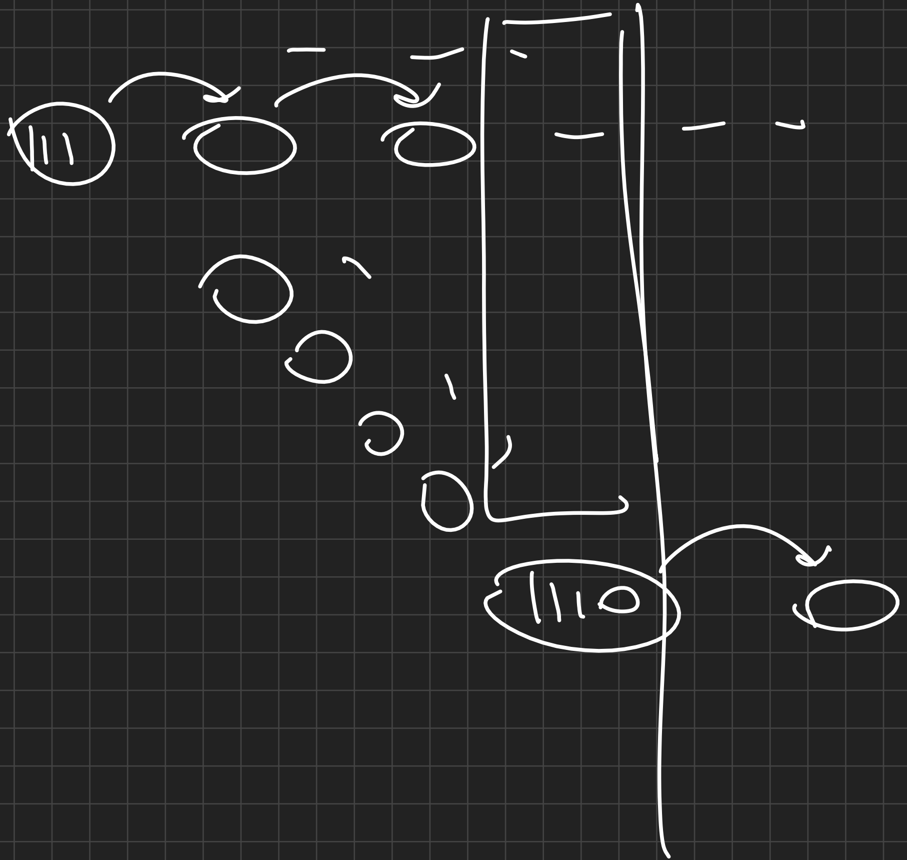
$\vdots$

$10 \pmod{11}$ — 1110

quindi ottengo tutti i ≥ 1100

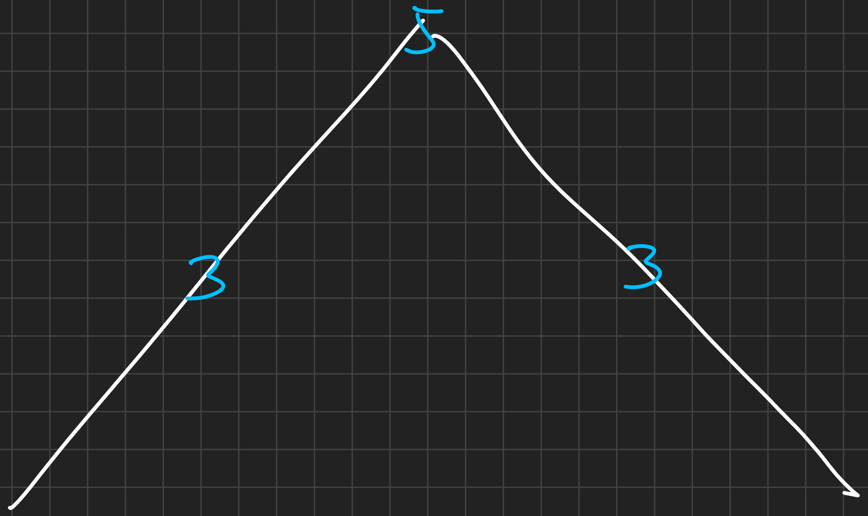
$[1100, 1109]$


+11
0
11
22
1
12
2
10
21


111
1110

- se $x \geq ab$, YES
- altr., guardo "a mano" (brute force)

3



$$\underbrace{1 \quad 2 \quad \cancel{3} \quad 4 \quad \cancel{5}}_{n-1}$$

n el. in $[1, m]$ ($n-1$ distinti)

- scelgo gli el. $\binom{m}{n-1}$
- scelgo l'el. duplicato $n-2$
- decido dove mettere gli altri 2^{n-3}

⚠ Se $n=2$, attenti quando "dovete calcolare" 2^{-1}

4

$$a+b+\gcd(a,b)=n$$

- a, b multipli di $\gcd(a,b) =: g$

$$g\left(\frac{a}{g}+\frac{b}{g}+1\right)=n \qquad \gcd(a,b)=g$$

interi arbitrari?

$$g(a'+b'+1)=n \qquad \gcd(a',b')=1$$

$$g(a+b+1)=n \qquad (a := a')$$

$$a+b=\frac{n}{g}-1 \qquad \gcd(a,b)=1$$

$$b = \frac{n}{g} - a - 1$$

$$\gcd\left(a, \frac{n}{g} - a - 1\right) = 1$$

$$\gcd\left(a, \frac{n}{g} - 1\right) = 1$$

a coprimo con $\frac{n}{g} - 1$

$$\left(1 \leq a < \frac{n}{g} - 1\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \gcd(a, x) = 1 \\ 0 \leq a < x \\ \# \text{ soluzioni: } \varphi(x) \end{array}\right.$$

- Come calcolo velocemente $\varphi(n)$?

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$$

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

- mi serve conoscere la fatt. di n

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	3	2	5	2	7	2	3	2

- per ogni intero in $[1, n]$ trovo un suo fattore primo con il crivello
- per ogni n fattorizzo in $O(\log(n))$ e calcolo $\varphi(n)$