STAGE #2

Matematica

10/02/2024

Bound Classici

0) Numero di numeri primi $< N$: $\sim \frac{N}{\ln N}$

1) Numero di divisori di N: $\sim \sqrt[3]{N}$

← Rules of Thumb

2) Numero di fattori primi di N (con molteplicità): $O(\log N)$

$12 = 2^2 \cdot 3$ $\quad 2, 2, 3 \Rightarrow 3$ fattori

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{k} = 2^k \qquad O(\log N)$$

"Caso Peggiore"
(2 è il primo più piccolo)

3) Trovare i divisori di N / Trovare la fattorizzazione di N

$O(\sqrt{N})$ $\quad$ $O(\sqrt{N}/\log\sqrt{N})$

$O(N)$? $\quad \frac{N}{2}$? $= O(N)$

$O(\sqrt{N})$ ✓ ← (Trova i divisori)

$O(\sqrt{N}/\log\sqrt{N})$ ← (Trova fattorizzazione)

↳ uso solo i primi $< \sqrt{N}$

$x \cdot y = N$

$\min(x, y) = ?$ → Qual è il massimo di $\min(x,y)$?

$x = y$ $\quad$ $x \cdot y = x \cdot x = N$

$x^2 = N$

$\boxed{x = \sqrt{N}}$

4) COME CONTARE IL NUMERO DI DIVISORI PARTENDO DALLA FATTORIZZAZIONE?

$$N = \underbrace{p_1^{\alpha_1}} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_Q^{\alpha_Q} \qquad 12 = 2^2 \cdot 3^1$$

p_1, α_1 → 1, 2, 4

→ Non lo prendo (1 modo)
Lo prendo $\underbrace{1 \dots \alpha_1}_{(\alpha_1 \text{ modi})}$

$\alpha_1 + 1$ → $1 \dots p_1^{\alpha_1}$

$\alpha_2 + 1$ → $1 \dots p_2^{\alpha_2}$

⋮

$\alpha_Q + 1$ → $1 \dots p_Q^{\alpha_Q}$

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_Q+1)$$

5) COMPLESSITÀ DELLA SERIE ARMONICA $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ $\left(\sum_{n=1} \frac{1}{n}\right)$

Ogni somma parziale della prima serie < s.p. seconda serie

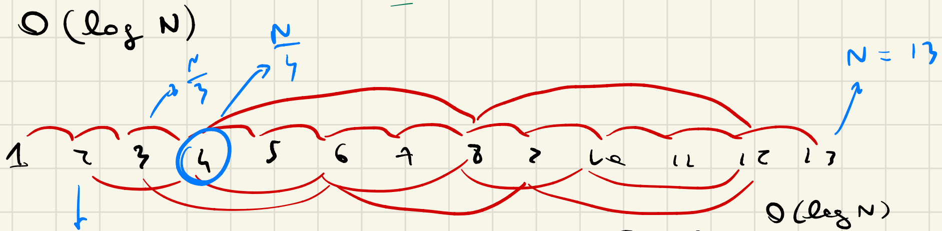
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots \frac{1}{16} \dots$$

Costruisco un'altra serie

$$\underbrace{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots} \; \frac{1}{16} \dots$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$O(\log N)$$



$$N + \frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \dots = N\Big(\overbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots}^{O(\log N)}\Big) = O(N \log N)$$

Calcolo Combinatorio

1) Fattoriali, Coefficienti Binomiali [Ripasso]

2) Stars and Bars (Combinazioni con ripetizione)

3) Numeri di Catalan

4) Derangements

---

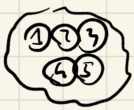
1) Fattoriali, Coefficienti Binomiali

$1 \quad \cancel{2} \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$\underline{2} \quad \underline{4} \quad \underline{\ } \quad \underline{\ } \quad \underline{\ }$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$



Pesco 3 palline ...

$\frac{5!}{3!\,2!}$

$\boxed{\underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{4}} \quad \underline{5} \quad \underline{1}$

$2 \quad 4 \quad 3 \quad 5 \quad 1$

$3 \quad 2 \quad 4 \qquad 1 \quad 5$

$$C(N,k) = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}$$

$$\frac{N!}{(N-k)!\,(N-(N-k))!}$$

$$\binom{N}{k} = \binom{N-1}{k-1} + \binom{N-1}{k}$$

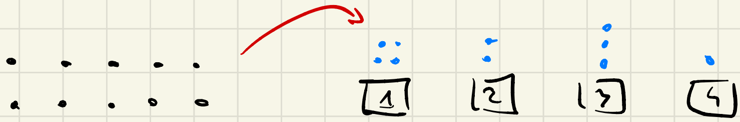
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$a=1,\ b=1 \longleftarrow (a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}$$

$$(1+1)^N = \Sigma \ldots = 2^N = \binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \ldots + \binom{N}{N-1} + \binom{N}{N}$$

2) STARS AND BARS



$* \ * \ * \ * \ | \ * \ * \ | \ * \ * \ * \ | \ *$

$$\binom{13}{3} = \binom{13}{10}$$

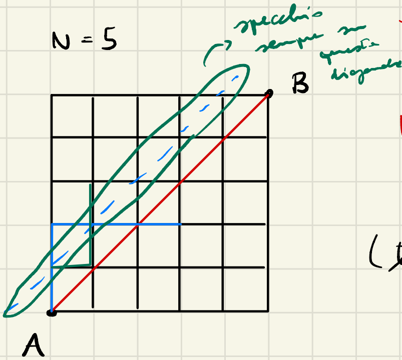
N = # PALLINE

K = # SCATOLE

$$\binom{N+K-1}{K-1} = \binom{N+K-1}{N} = \frac{(N+K-1)!}{N!\,(K-1)!}$$

3) Numeri di Catalan

N = 5

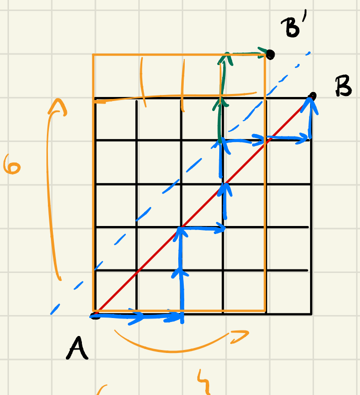


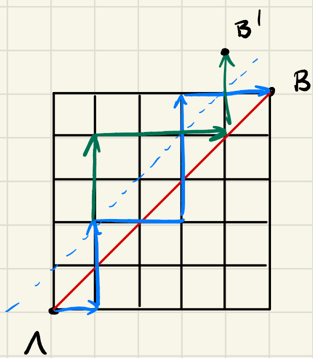
Domanda #1: Quanti percorsi distinti da A a B?

Domanda #2: Quanti percorsi distinti da A a B che non superano la diagonale?

$(\cancel{Dx}, \cancel{up})$
$\quad D \quad U$

$$\frac{2N!}{N!\,N!} = \binom{2N}{N}$$





$$\binom{10}{6} = \binom{10}{4}$$

Path Sbagliate!

$$= \binom{2N}{N} - \underset{\binom{2N}{N+1}}{\overset{\parallel}{\binom{2N}{N-1}}}$$

$$= \frac{(2N)!}{N!\,N!} - \frac{(2N)!}{(N+1)!\,(N-1)!}$$

$$= \binom{2N}{N}\left(\frac{1}{N+1}\right)$$

4) DERANGEMENTS

N persone

5 persone

1, 2, 3, 4, 5

$$!N = (N-1)(!(N-2) + !(N-1))$$

DERANGEMENT

"(DISMUTAZIONI)

Disponibili: $\cancel{1}$ 2, 3, 4, 5

$$der(N) = (N-1)\left(der(N-2) + der(N-1)\right)$$

2 3 _ _ _

$$der(5) = (4)\left(\underbrace{der(3)} + \underbrace{der(4)}\right)$$

(Caso 1) 1 ?

(Caso 2) 3, 4, 5 ?

- 2 va in posizione 1
- 1 va in posizione 2

(derangement di 3, 4, 5)

- 2 va in posizione 1
- 1 NON va in posizione 2

(derangement di 1, 3, 4, 5 su posizioni 2, 3, 4, 5 dove 1 non va in posizione 2)