GEOMETRIA COMPUTAZIONALE

Disclaimer: lavorare con float o double è da evitare!

→ Useremo i long long.

Oggetti fondamentali:
- Punto
- Retta

Punto Due numeri $(P_x, P_y) \leftarrow$ coordinate

Possiamo anche vederlo come un vettore $\vec{V} = (V_x, V_y)$

Punto	Vettore
Somma $P+Q$ $\shortparallel$ $(P_x+Q_x,\ P_y+Q_y)$	Somma (Traslazione) "Regola del parallelogramma"
(1) Differenza	"
Moltiplicazione per scalare $kP = (kP_x,\ kP_y)$	" "Riscalamento"
(2) Distanza dall'origine $d(O,P) = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$	Modulo Definizione

(1) + (2) $\Rightarrow$ distanza tra due punti

$$d(P,Q) = d(O, Q-P)$$

Retta

Rappresentazione?

- $y = mx + q \rightsquigarrow$ coppia (m, q)

  Sconsigliata! (a) m, q non sono interi

  (b) non becca tutte le rette!

- $ax + by + c = 0$ con a, b, c interi

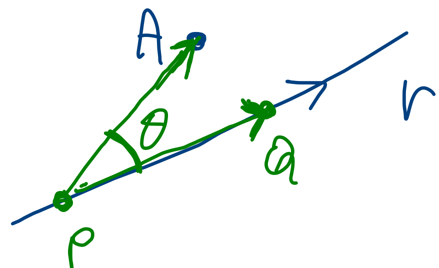
  $\rightsquigarrow$ tripla (a, b, c)

  Meno sconsigliata, ma difficile da usare

- Coppia di punti distinti ⇝ (P, Q) ← si può fare solo così

Buona!

Domanda Dati P punto e r retta (orientata)



$\overrightarrow{PQ} = Q - P$

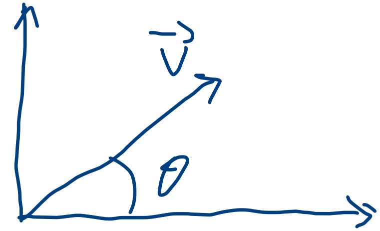
$\overrightarrow{PA} = A - P$

dove sta A rispetto a r?

- Sopra? $\Updownarrow$ $\theta = 0$
- A sx? $\Updownarrow$ $\theta > 0 \iff$ da $\overrightarrow{PQ}$ a $\overrightarrow{PA}$ ruoto in senso antiorario
- A dx? $\iff \theta < 0$

Come si valuta θ?

Modo ovvio: lo calcolo [illegible]

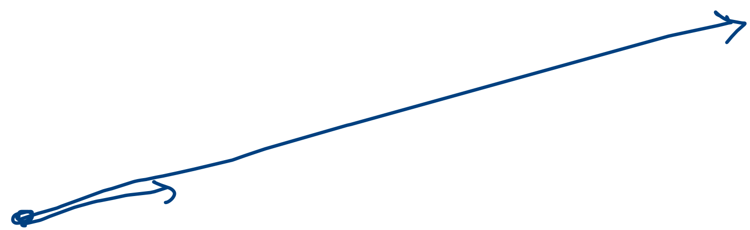


$$\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\text{atan2}(v_y, v_x)$$

NO! Usa i float (imprecisi e lenti)



Modo meno ovvio: prodotto vettore!

Prodotto vettore

$P \wedge Q$ = numero

Definito in due modi:

(i) $P \wedge Q = |P| \cdot |Q| \cdot \sin\theta$

$|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$ θ = angolo tra P e Q

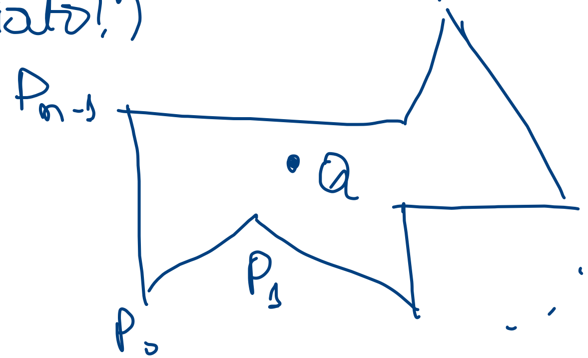
(ii) $P \wedge Q = P_x Q_y - P_y Q_x$

Da (i) segue che
$\theta < 0 \iff P \wedge Q < 0$
$\theta > 0 \implies P \wedge Q > 0$
$(\theta = 0) \iff P \wedge Q = 0$

Da (ii) segue che posso usare gli interi!

Problema Dato un poligono, capire se un punto sta dentro o fuori. (o sul perimetro)

Poligono: sequenza di punti distinti $P_0, \dots, P_{n-1}$ (non intrecciato!)



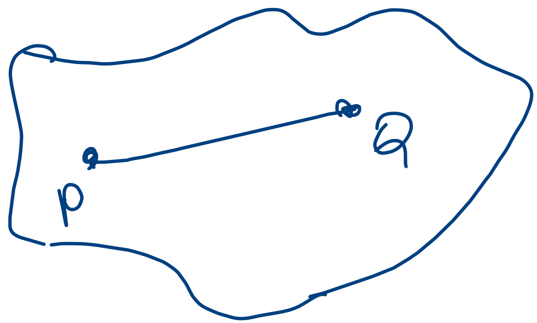
Specializzazioni: (a) Rispondo subito a ogni query

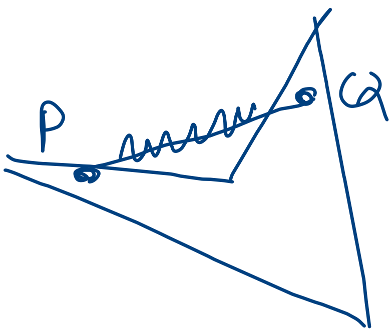
(b) Rispondo a tutte le query alla fine

(c) Il poligono è convesso (online)

Convesso $\iff$
- Angoli interni $\leq 180°$
- Insieme di punti arbitrario S

$P, Q \in S \Rightarrow \overline{PQ} \subseteq S$



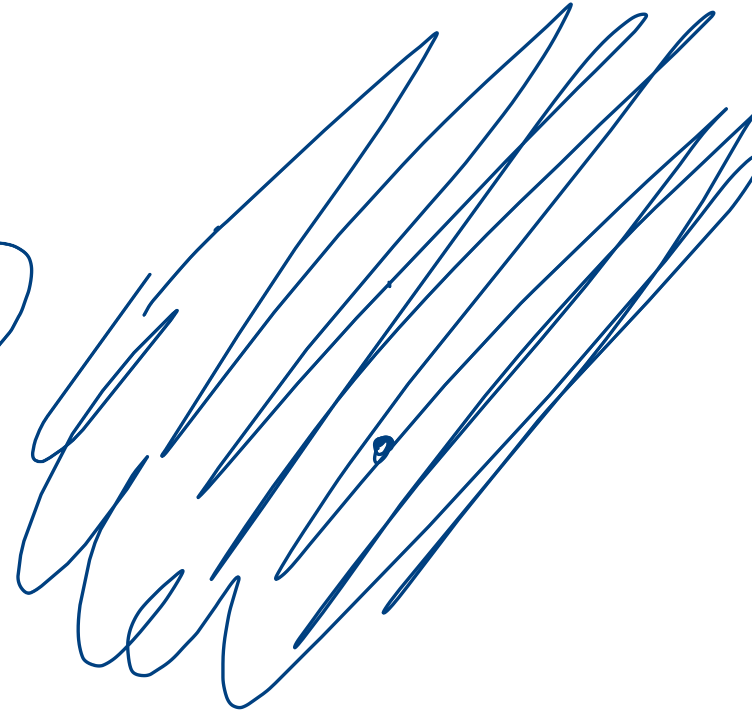


✓ (a) $O(n)$ per query senza preprocessing

✗ (b) $O(n)$ complessivo con $O(n \log n)$ prep.

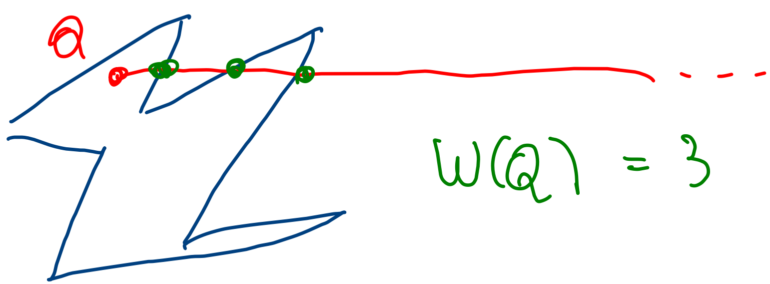
✓ (c) $O(\log n)$ per query " " "

(a)



Non banale!

Idea: contare il "winding number" di Q.



$W(Q) = 3$

Proprietà di $\omega(Q)$:

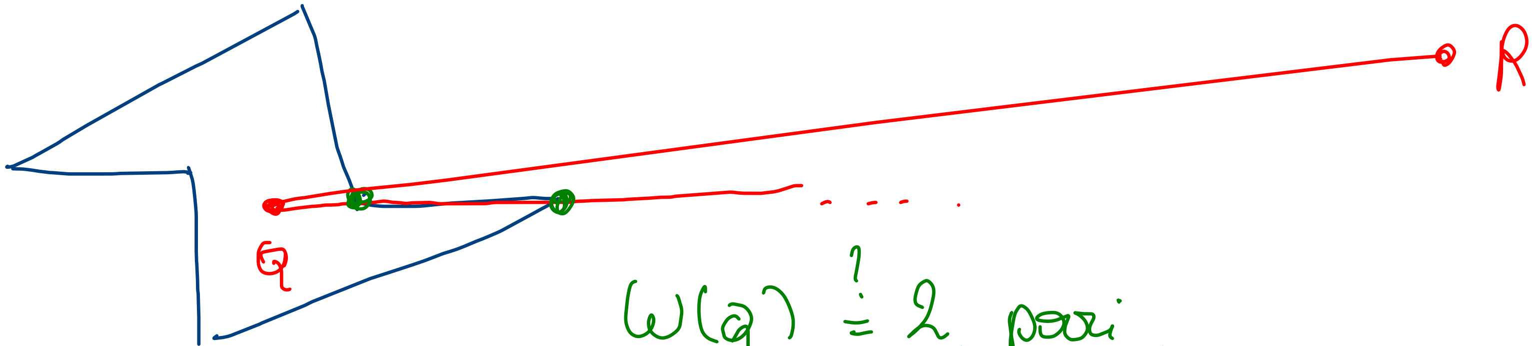
(i) Non dipende dalla semiretta

(ii) È dispari $\iff$ $Q \in$ poligono

Ogni volta che "scavalco" un lato passo da dentro a fuori o viceversa

Complicazioni:

- Che succede se la semiretta passa per un vertice (o peggio: contiene un lato)
- Come si calcola?



$\omega(Q) \stackrel{?}{=} 2$ pari
Ma Q sta dentro! No

Soluzione: prendo la semiretta $\overrightarrow{QR}$ dove

R_x, R_y sono random e $\underset{2}{\gg}$ $P_{i,x}$, $P_{i,y}$, Q_x, Q_y.

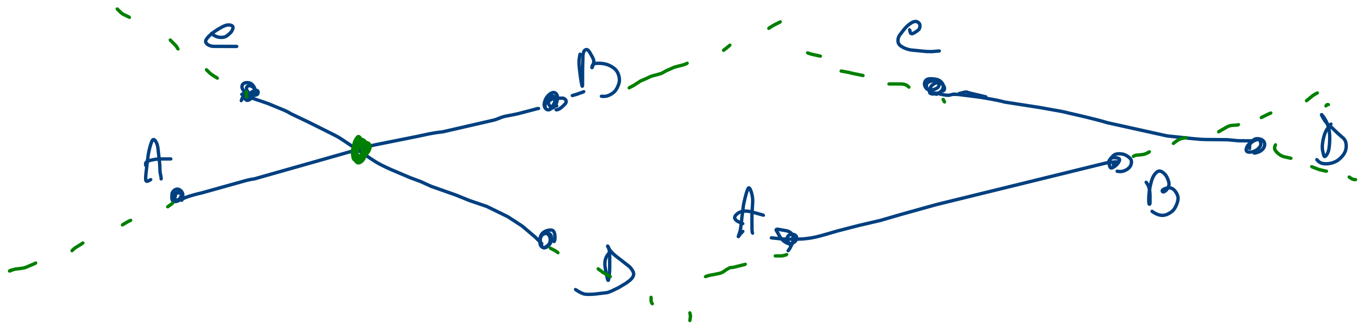
quadrato delle coordinate

Probabilità che $\overrightarrow{QR}$ contenga un vertice quasi nulla.

Come si calcola in pratica?

Scorro tutti i lati e vedo se $\overline{QR}$ interseca $\overline{P_i P_{i+1}}$

Come si fa l'intersezione di segmenti?



Mi riconduco al problema della posizione di un punto rispetto a una retta.

$\overline{AB} \cap \overline{CD} \neq \emptyset \iff$ C, D stanno da parti opposte wrt AB

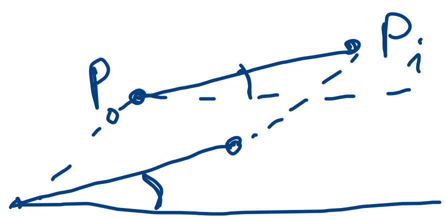
e A, B " " " " " CD

Come si ordina per angolo?

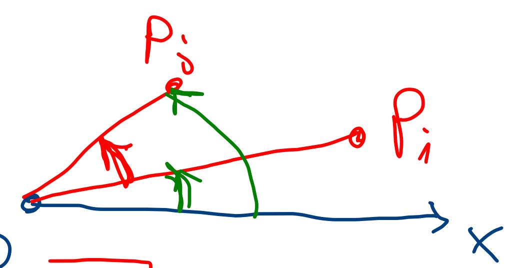
Sempre con il prodotto vettore!

$$P_i < P_j \iff \measuredangle\, x P_0 P_i < x P_0 P_j$$

$$\iff \measuredangle\, x O (P_i - P_0) < x O (P_j - P_0)$$

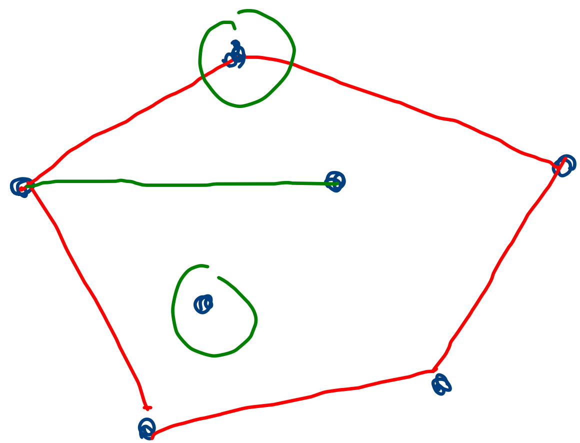


$$\iff \measuredangle\, (P_i - P_0)\, O\, (P_j - P_0) > 0$$



$$\iff \boxed{(P_i - P_0) \wedge (P_j - P_0) > 0}$$

Problema: Dati n punti nel piano, determinare il loro "convex hull" (inviluppo convesso), cioè i vertici del più piccolo poligono che li contiene tutti (anche sul perimetro).



Più piccolo = ? L'intersezione di tutti i poligoni che (infiniti) contengono tutti i punti.

- Perché è utile? Perché sì.
- Come si calcola?
  - Facile in $O(n^3)$
  - Si può fare in $O(n \log n)$

Andrew's Monotone Chain algorithm.

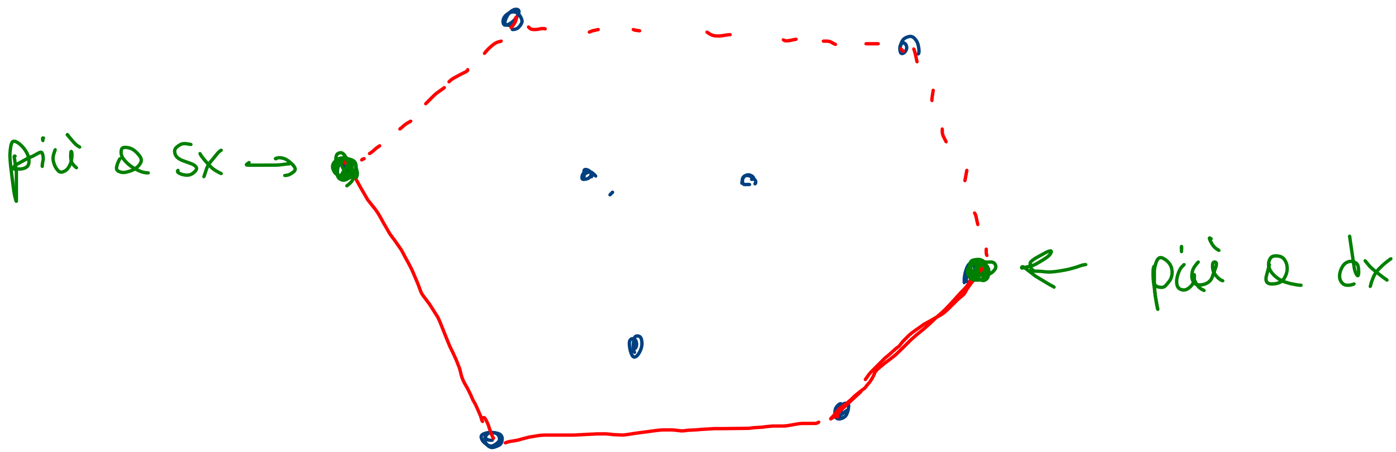
(i) Calcolo il "sotto convex hull"

(ii) Calcolo il "sopra convex hull"

(iii) Li unisco

(iv) Enjoy your convex hull!

(i) Che cos'è?



È la parte di convex hull che sta sotto il punto più a sx e quello più a dx.

Come si calcola?

- Ordino i punti per x (e a parità di x?)

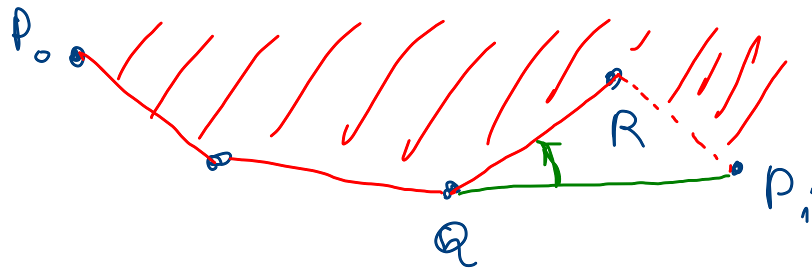
  Questo mi dà P_0 = p.to più a sx,

- Metto P_0 nel sotto convex hull

  Osservazione: P_0 ci sta sempre

- Itero sugli altri punti in ordine di x. Per ogni P_i:

  - Aggiungo P_i in coda al sotto convex hull

- Finché contiene almeno 3 punti:
  - Considero gli ultimi 3 punti Q, R, P_i
  - 

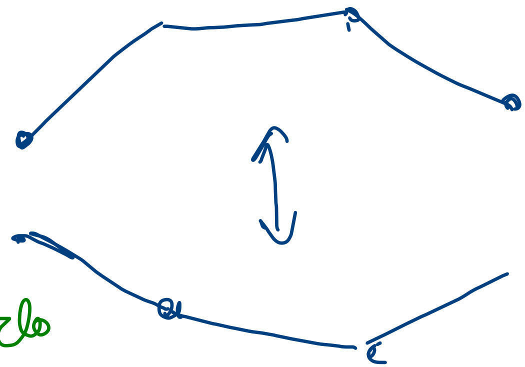
    Controllo se R va tolto.

    $\iff \measuredangle P_i Q R \geq 0 \iff (P_i - Q) \wedge (R - Q) \geq 0$

- Fine: A questo punto ho il sotto convex hull.

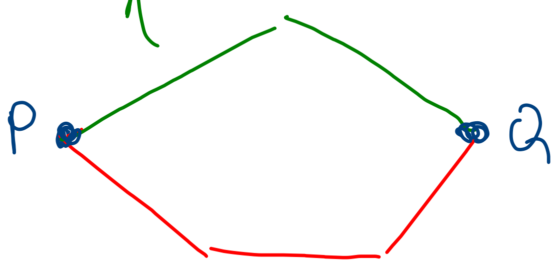
(ii) Sopra convex hull: identico ma cambia il segno del prodotto vettore.

Trucco: cambio segno a tutte le y e ricalcolo il sotto convex hull



devo reversarlo

(iii)



P e Q sono in comune!

⇝ Rimuovo l'ultimo punto di entrambi

Remark: Il convex hull è convesso!

E quando le x sono uguali?

Modo furbo: perturbare l'input tramite un'applicazione lineare.

Scelgo 4 numeri a, b, c, d "grandi e coprimi" e sostituisco (p_x, p_y) con $(ap_x + bp_y,\ cp_x + dp_y)$.

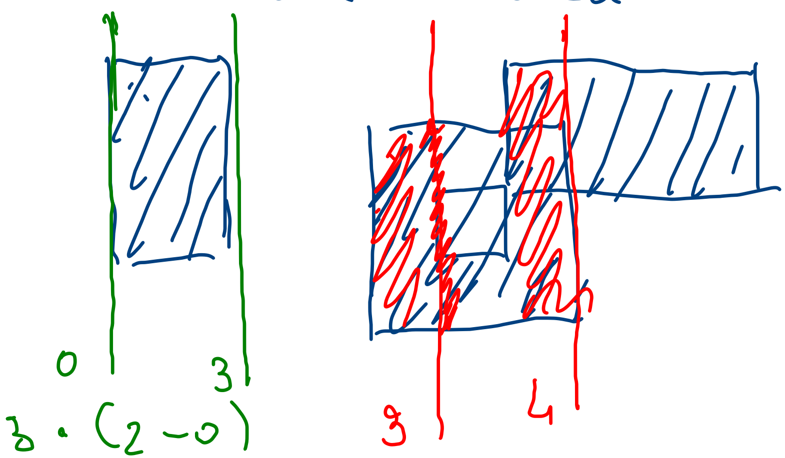
$$\left[\ \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}\ \right]$$

Quasi sicuramente le x sono tutte distinte.

Sweep line

Tecnica generale: ordino i punti da sx a dx e li scorro immaginando una retta verticale (sweeping line) che si muove.

Problema Dati n rettangoli (allineati con gli assi), calcolare l'area della loro unione.



ris $A = \boxed{22}$

Idea: Uso la sweep line!

- Come si calcola la lunghezza dell'intersezione?
- Devo davvero iterare su tutte le x?

  No: basta scorrere quelle che sono coordinata x

  di un vertice di almeno un rettangolo.

Uso un segment tree (1D) che conta, per ogni y, quanti rettangoli intersecano (x, y).

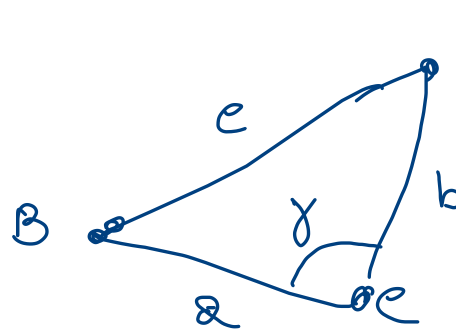
sweep line

Il ST ritorna il numero di zeri.

Remark: Se le y sono molto grandi ($> 10^6$),
il ST deve essere sparso

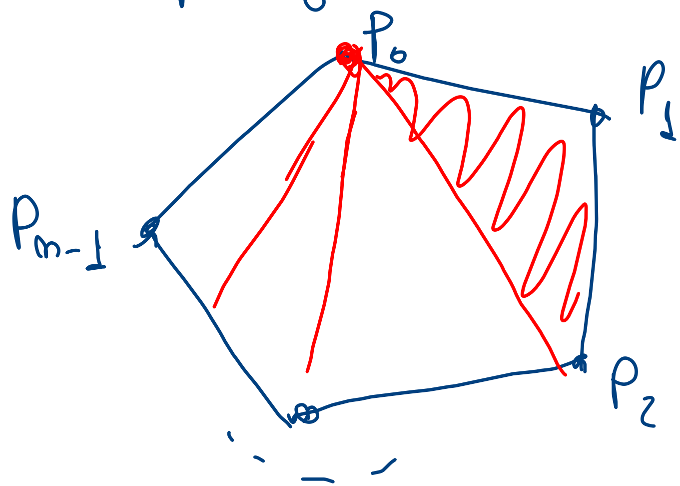
Problema Dato un poligono (qualsiasi), calcolarne l'area.

Caso semplice: triangolo.



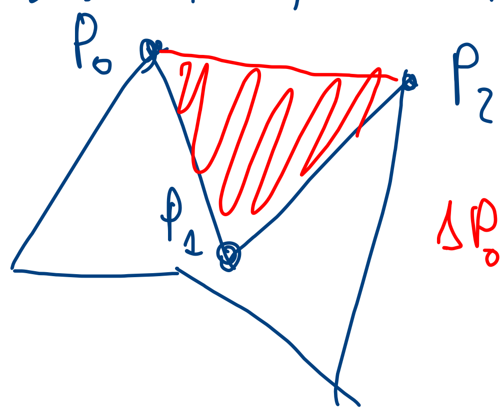
$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{a \cdot b \cdot |\sin \gamma|}_{\text{prodotto vettore}} = \frac{1}{2} \left| (A-C) \wedge (B-C) \right|$$

Caso medio: poligono convesso.

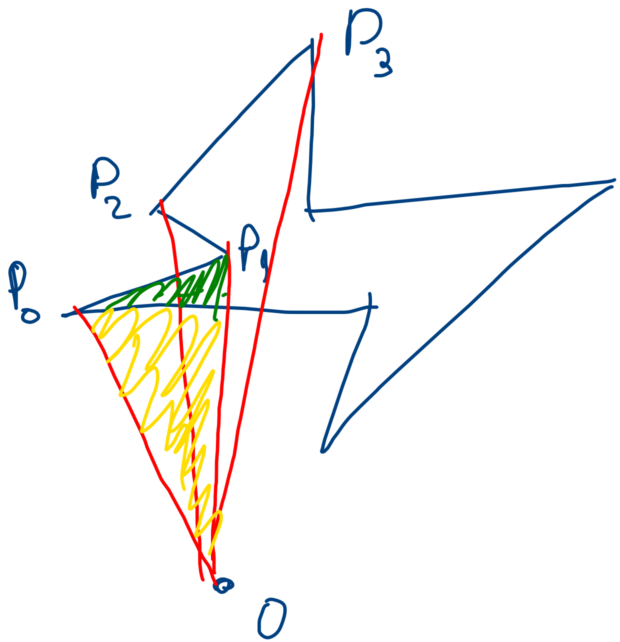


Sommo le aree di $\Delta P_0 P_1 P_2, \ldots, \Delta P_0 P_{n-2} P_{n-1}$.

Caso generale.



$\Delta P_0 P_1 P_2 \not\subseteq$ poligono.



Calcolo l'area* con segno* di $\Delta O P_0 P_1, \dots, \Delta O P_{n-2} P_{n-1}, \Delta O P_{n-1} P_0$

$\downarrow$

$$A_s(\Delta XYZ) = \frac{1}{2}(X-Z) \wedge (Y-Z)$$

Le sommo e prendo il valore assoluto.

Remark: L'area non è sempre intera, ma

$2A$ lo è!